استخدام خوازميات الفروق الأمامية والخلفية وخوارزمية كرانك – نيكلسون حل معادلة الحرارة في ثلاثة أبعاد

د. عباس عبدالعزيز جمعه محمود
جامعة الزعيم الأزهري–قسم الرياضيات

مقدمة:

معادلة الحرارة معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية، وتصنف من النوع المكافئ، وتظهر في عدة مجالات علمية مختلفة، سواءً كانت هندسية أم فيزيائية.

ونظرًا لصعوبة الحصول على حلول تحليلية لمعظم المعادلات التفاضلية الجزئية، ومنها معادلة الحرارة؛ فإن الحاجة إلى استخدام خوارزميات عددية تكون ضرورية جدًا.

وسنقدم دراسة تحليلية وعددية لحل معادلة الحرارة في ثلاثة أبعاد، وذلك من خلال دراسة توزيع درجات الحرارة في خلية شمسية، ضمن شروط ابتدائية حدية غير وهي: الطريقة الأمامية $(Forward\ Method)$والطريقة الخلفية $(Backward\ Method)$وطريقة كرانك نيكلسون $(Crank-Nicolson)$.

مستخلص:

في هذه الدراسة حصلنا على حلول تقريبية باستخدام مجموعة الخوارزميات العددية، والمقارنة فيما بينها، من حيث دقة الحلول، وتقاربها، ودرجة استقرار الحل العددي، وتناسق الخوارزميات العددية مع معادلة الحرارة، الأمر الذي ساعدنا في الحصول على أفضل الحلول الممكنة لمعادلة الحرارة.

الكلمات المفتاحيه: معادلة الحرارة، الفروق الامامية، الفروق الخلفية، خوارزمية كرانك

1. المسألة العددية ***Numerical Problem***

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1)$$

$$; \quad T_x(0,y,z,t)=0$$
$$; \quad T_x(a,y,z,t)=0$$
$$; \quad T(x,0,z,t)=T_1=20$$
$$; \quad T(x,c,z,t)=T_2=60$$
$$; \quad T_z(x,y,0,t)=0$$
$$; \quad T_z(x,y,b,t)=0$$

$$; \quad T(x,y,z,0) = 25xyz$$

1. باستخدام خوارزمية الفروق الأمامية

$$T_{i,j,k}^{l+1} = (1-6\lambda)T_{i,j,k}^{l} + \lambda[T_{i+1,j,k}^{l} + T_{i-1,j,k}^{l} + T_{i,j+1,k}^{l} + T_{i,j-1,k}^{l} + T_{i,j,k+1}^{l} + T_{i,j,k-1}^{l}] \quad \dots\dots(2)$$

2. باستخدام خوارزمية الفروق الخلفية

$$T_{i,j,k}^{l} = (1+6\lambda)T_{i,j,k}^{l+1} - \lambda[T_{i+1,j,k}^{l+1} + T_{i-1,j,k}^{l+1} + T_{i,j+1,k}^{l+1} + T_{i,j-1,k}^{l+1} + T_{i,j,k+1}^{l+1} + T_{i,j,k-1}^{l+1}]$$

$$\Rightarrow (1+6\lambda)T_{i,j,k}^{l+1} = T_{i,j,k}^{l} + \lambda[T_{i+1,j,k}^{l+1} + T_{i-1,j,k}^{l+1} + T_{i,j+1,k}^{l+1} + T_{i,j-1,k}^{l+1} + T_{i,j,k+1}^{l+1} + T_{i,j,k-1}^{l+1}]$$

$$\Rightarrow T_{i,j,k}^{l+1} = \frac{\lambda}{1+6\lambda}[T_{i+1,j,k}^{l+1} + T_{i-1,j,k}^{l+1} + T_{i,j+1,k}^{l+1} + T_{i,j-1,k}^{l+1} + T_{i,j,k+1}^{l+1} + T_{i,j,k-1}^{l+1}] + \frac{1}{1+6\lambda}T_{i,j,k}^{l} \quad \dots\dots(3)$$

3. باستخدام خوارزمية كرانك – نيكلسون

$$T_{i,j,k}^{l+1} - T_{i,j,k}^{l} = \frac{1}{2}\lambda[T_{i+1,j,k}^{l+1} + T_{i-1,j,k}^{l+1} + T_{i,j+1,k}^{l+1} + T_{i,j-1,k}^{l+1} + T_{i,j,k+1}^{l+1} + T_{i,j,k-1}^{l+1} - 6T_{i,j,k}^{l+1}] + \frac{1}{2}\lambda[T_{i+1,j,k}^{l} + T_{i-1,j,k}^{l} + T_{i,j+1,k}^{l} + T_{i,j-1,k}^{l} + T_{i,j,k+1}^{l} + T_{i,j,k-1}^{l} - 6T_{i,j,k}^{l}]$$

$$\Rightarrow (1+3\lambda)T_{i,j,k}^{l+1} = \frac{1}{2}\lambda[T_{i+1,j,k}^{l+1} + T_{i-1,j,k}^{l+1} + T_{i,j+1,k}^{l+1} + T_{i,j-1,k}^{l+1} + T_{i,j,k+1}^{l+1} + T_{i,j,k-1}^{l+1}] + \frac{1}{2}\lambda[T_{i+1,j,k}^{l} + T_{i-1,j,k}^{l} + T_{i,j+1,k}^{l} + T_{i,j-1,k}^{l} + T_{i,j,k+1}^{l} + T_{i,j,k-1}^{l}] + (1-3\lambda)T_{i,j,k}^{l}$$

$$\Rightarrow T_{i,j,k}^{l+1} = \frac{\lambda}{2+6\lambda}[T_{i+1,j,k}^{l+1} + T_{i-1,j,k}^{l+1} + T_{i,j+1,k}^{l+1} + T_{i,j-1,k}^{l+1} + T_{i,j,k+1}^{l+1} + T_{i,j,k-1}^{l+1}] + \frac{\lambda}{2+6\lambda}[T_{i+1,j,k}^{l} + T_{i-1,j,k}^{l} + T_{i,j+1,k}^{l}$$

$$+T^{l}_{i,j-1,k}+T^{l}_{i,j,k+1}+T^{l}_{i,j,k-1}]+\frac{1-3\lambda}{1+3\lambda}T^{l}_{i,j,k} \quad \dots\dots(4)$$

4. الشروط المساعدة *Auxiliary Conditions*

$$T_x(0,y,z,t)=0 \Longrightarrow \frac{T(x_2,y,z,t)-T(x_1,y,z,t)}{\Delta x}=0$$

$$\Longrightarrow T(x_1,y,z,t)=T(x_2,y,z,t) \quad \dots\dots(5)$$

$$T_x(a,y,z,t)=0 \Longrightarrow \frac{T(x_n,y,z,t)-T(x_{n-1},y,z,t)}{\Delta x}=0$$

$$\Longrightarrow T(x_n,y,z,t)=T(x_{n-1},y,z,t) \quad \dots\dots(6)$$

$$T(x,0,z,t)=T_1=20$$

$$\Longrightarrow T(x,y_1,z,t)=T_1=20 \quad \dots\dots(7)$$

$$T(x,c,z,t)=T_2=60$$

$$\Longrightarrow T(x,y_n,z,t)=T_2=60 \quad \dots\dots(8)$$

$$T_z(x,y,0,t)=0 \Longrightarrow \frac{T(x,y,z_2,t)-T(x,y,z_1,t)}{\Delta z}=0$$

$$\Longrightarrow T(x,y,z_1,t)=T(x,y,z_2,t) \quad \dots\dots(9)$$

$$T_z(x,y,b,t)=0 \Longrightarrow \frac{T(x,y,z_n,t)-T(x,y,z_{n-1},t)}{\Delta z}=0$$

$$\Longrightarrow T(x,y,z_n,t)=T(x,y,z_{n-1},t) \quad \dots\dots(10)$$

$$T(x,y,z,0)=25xyz \quad \dots\dots(11)$$

5. التناغم (التناسق) *Consistency*

معادلة الفروق المنتهية تكون متناغمة (متناسقة) مع المعادلة التفاضلية الجزئية إذا كان الخطأ الباقي يؤول إلى الصفر عندما $(h,\Delta t)\rightarrow(0,0)$، أي أن:-

$$\lim_{(h,\Delta t)\rightarrow(0,0)} T.E=0 \quad (12)$$

يمكن استخدام مفكوك متسلسلة تايلور لاستبدال المعادلة التفاضلية الجزئية بمعادلات الفروق، وتقودنا الحدود المتبقية لما يعرف بالباقي *Remainder* والمستخدم لقياس الدقة لتقريب الفرق النهائي، والخوارزمية التي لها أخطاء باقية محلية أصغر تكون عادةً مفضلة، ولكن ليس دائمًا، فهناك اعتبارات أخرى بالإضافة إلى الباقي تجعل تقريب فرق نهائي معين مفضل للتطبيق، منها: التناغم، والاستقرار، والتقارب .[32]

$$\because \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{T^l_{i+1,j,k}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i-1,j,k}}{h^2}+\frac{T^l_{i,j+1,k}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i,j-1,k}}{h^2}$$

$$+\frac{T^l_{i,j,k+1}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i,j,k-1}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T^{l+1}_{i,j,k}-T^l_{i,j,k}}{\Delta t}$$

بوضع $\lambda=\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}$ نحصل على:

$$\Rightarrow T^{l+1}_{i,j,k}-T^l_{i,j,k}=\lambda[T^l_{i+1,j,k}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i-1,j,k}+T^l_{i,j+1,k}$$
$$-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i,j-1,k}+T^l_{i,j,k+1}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i,j,k-1}]$$

بأخذ تركيب خطي للطرف الأيمن على فترتين زمنيتين نحصل على:-

$$T^{l+1}_{i,j,k}-T^l_{i,j,k}=\lambda\theta_1[T^{l+1}_{i+1,j,k}-2T^{l+1}_{i,j,k}+T^{l+1}_{i-1,j,k}]$$
$$+\lambda(1-\theta_1)[T^l_{i+1,j,k}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i-1,j,k}]$$
$$+\lambda\theta_2[T^{l+1}_{i,j+1,k}-2T^{l+1}_{i,j,k}+T^{l+1}_{i,j-1,k}]$$
$$+\lambda(1-\theta_2)[T^l_{i,j+1,k}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i,j-1,k}]$$
$$+\lambda\theta_3[T^{l+1}_{i,j,k+1}-2T^{l+1}_{i,j,k}+T^{l+1}_{i,j,k-1}]$$
$$+\lambda(1-\theta_3)[T^l_{i,j,k+1}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i,j,k-1}] \quad (13)$$

الآن نقوم بحساب الباقي (خطأ القطع - البتر) $Truncation\ Error$ كما يلي:

$$T.E=T^{l+1}_{i,j,k}-T^l_{i,j,k}-\lambda\theta_1[T^{l+1}_{i+1,j,k}-2T^{l+1}_{i,j,k}+T^{l+1}_{i-1,j,k}]$$
$$-\lambda(1-\theta_1)[T^l_{i+1,j,k}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i-1,j,k}]$$
$$-\lambda\theta_2[T^{l+1}_{i,j+1,k}-2T^{l+1}_{i,j,k}+T^{l+1}_{i,j-1,k}]$$
$$-\lambda(1-\theta_2)[T^l_{i,j+1,k}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i,j-1,k}]$$
$$-\lambda\theta_3[T^{l+1}_{i,j,k+1}-2T^{l+1}_{i,j,k}+T^{l+1}_{i,j,k-1}]$$
$$-\lambda(1-\theta_3)[T^l_{i,j,k+1}-2T^l_{i,j,k}+T^l_{i,j,k-1}]$$

$\dots\dots(14)$

وحسب مفكوك متسلسلة تايلور للدالة $T^{l+1}_{i,j,k}=T(x,y,z,t+\Delta t)$ يكون لدينا:

$$T_{i,j,k}^{l+1} = T_{i,j,k}^{l} + \Delta t\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + \ - - -$$

بوضع $\Delta t = \frac{\lambda.h^2}{\alpha}$ نحصل على:

$$T_{i,j,k}^{l+1} = T_{i,j,k}^{l} + \frac{\lambda.h^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\lambda^2.h^4}{2\alpha^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\lambda^3.h^6}{6\alpha^3}\frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + \ - - -$$

وحيث أن $\frac{\partial}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$ وبالتالي فإن $\frac{\partial^m T}{\partial t^m} = \alpha^m \nabla^{2m} T$ وبالتعويض نحصل على:

$$T_{i,j,k}^{l+1} = T_{i,j,k}^{l} + \lambda.h^2.\nabla^2 T + \frac{\lambda^2.h^4}{2}\nabla^4 T + \frac{\lambda^3.h^6}{6}\nabla^6 T + \ - - -$$

... ... (15)

بالمثل حسب مفكوك تايلور للدالة $T_{i\pm1,j,k}^{l} = T(x \pm \Delta x, y, z, t)$ يكون لدينا:

$$T_{i+1,j,k}^{l} = T_{i,j,k}^{l} + \Delta x\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^5}{5!}\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + \frac{(\Delta x)^6}{6!}\frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \ - - -$$

$$\Longrightarrow T_{i\pm1,j,k}^{l} = T_{i,j,k}^{l} \pm h\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \pm \frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \ -$$
$$- -$$

$$\Longrightarrow T_{i+1,j,k}^{l} + T_{i-1,j,k}^{l} = 2T_{i,j,k}^{l} + h^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \ - - -$$

... ... (16)

بالمثل يكون لدينا:

$$T_{i,j+1,k}^{l} + T_{i,j-1,k}^{l} = 2T_{i,j,k}^{l} + h^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial y^6} + \ - - -$$

... ... (17)

$$T_{i,j,k+1}^{l} + T_{i,j,k-1}^{l} = 2T_{i,j,k}^{l} + h^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial z^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial z^6} + \ - - -$$

... ... (18)

وحسب نظرية تايلور في متغيرين للدالة $T_{i+1,j,k}^{l+1} = T(x + \Delta x, y, z, t + \Delta t)$ يكون لدينا:

$$T_{i+1,j,k}^{l+1} = T_{i,j,k}^{l} + (h.\frac{\partial}{\partial x} + \Delta t.\frac{\partial}{\partial t})T + \frac{1}{2!}(h.\frac{\partial}{\partial x} + \Delta t.\frac{\partial}{\partial t})^2 T$$

$$+\frac{1}{3!}(h.\frac{\partial}{\partial x}+\Delta t.\frac{\partial}{\partial t})^3T+\frac{1}{4!}(h.\frac{\partial}{\partial x}+\Delta t.\frac{\partial}{\partial t})^4T+---$$

$$\Longrightarrow T^{l+1}_{i+1,j,k}+T^{l+1}_{i-1,j,k}=2T^{l}_{i,j,k}+(1+2\lambda)h^2\frac{\partial^2T}{\partial x^2}$$

$$+(\frac{1}{12}+\lambda+\lambda^2)h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}+(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3})h^6\frac{\partial^6T}{\partial x^6}+---$$

... ... (19)

بالمثل يكون لدينا:

$$T^{l+1}_{i,j+1,k}+T^{l+1}_{i,j-1,k}=2T^{l}_{i,j,k}+(1+2\lambda)h^2\frac{\partial^2T}{\partial y^2}$$

$$+(\frac{1}{12}+\lambda+\lambda^2)h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}+(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3})h^6\frac{\partial^6T}{\partial y^6}+---$$

... ... (20)

$$T^{l+1}_{i,j,k+1}+T^{l+1}_{i,j,k-1}=2T^{l}_{i,j,k}+(1+2\lambda)h^2\frac{\partial^2T}{\partial z^2}$$

$$+(\frac{1}{12}+\lambda+\lambda^2)h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}+(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3})h^6\frac{\partial^6T}{\partial z^6}+---$$

... ... (21)

من (15)، (16)، (17)، (18)، (19)، (20)، (21) نعوض في (14) فنحصل على:

$$T.E=T^{l}_{i,j,k}+\lambda.h^2.\nabla^2T+\frac{\lambda^2.h^4}{2}\nabla^4T+\frac{\lambda^3.h^6}{6}\nabla^6T+---$$

$$-T^{l}_{i,j,k}-\lambda\theta_1[2T^{l}_{i,j,k}+(1+2\lambda)h^2\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+(\frac{1}{12}+\lambda+\lambda^2)h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}$$

$$+(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3})h^6\frac{\partial^6T}{\partial x^6}-2T^{l}_{i,j,k}-2\lambda.h^2.\frac{\partial^2T}{\partial x^2}$$

$$-\lambda^2.h^4.\frac{\partial^4T}{\partial x^4}-\frac{\lambda^3.h^6}{3}\frac{\partial^6T}{\partial x^6}]-\lambda(1-\theta_1)[2T^{l}_{i,j,k}+h^2\frac{\partial^2T}{\partial x^2}$$

$$+\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4T}{\partial x^4}+\frac{h^6}{360}\frac{\partial^6T}{\partial x^6}-2T^{l}_{i,j,k}]-\lambda\theta_2[2T^{l}_{i,j,k}+(1+2\lambda)h^2\frac{\partial^2T}{\partial y^2}$$

$$+(\frac{1}{12}+\lambda+\lambda^2)h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}+(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3})h^6\frac{\partial^6T}{\partial y^6}$$

$$-2T^{l}_{i,j,k} - 2\lambda.h^2.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \lambda^2.h^4.\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} - \frac{\lambda^3.h^6}{3}\frac{\partial^6 T}{\partial y^6}]$$

$$-\lambda(1-\theta_2)[2T^{l}_{i,j,k} + h^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial y^6} - 2T^{l}_{i,j,k}]$$

$$-\lambda\theta_3[2T^{l}_{i,j,k} + (1+2\lambda)h^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\frac{1}{12}+\lambda+\lambda^2)h^4\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$$

$$+(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3})h^6\frac{\partial^6 T}{\partial z^6} - 2T^{l}_{i,j,k} - 2\lambda.h^2.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$-\lambda^2.h^4.\frac{\partial^4 T}{\partial z^4} - \frac{\lambda^3.h^6}{3}\frac{\partial^6 T}{\partial z^6}] - \lambda(1-\theta_3)[2T^{l}_{i,j,k} + h^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$+\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial z^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial z^6} - 2T^{l}_{i,j,k}]$$

$$\Longrightarrow T.E = \lambda.h^2.\nabla^2 T + \frac{\lambda^2.h^4}{2}\nabla^4 T + \frac{\lambda^3.h^6}{6}\nabla^6 T + ---$$

$$-\lambda\theta_1[h^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\frac{1}{12}+\lambda)h^4\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + (\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})h^6\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}]$$

$$-\lambda(1-\theta_1)[h^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}]$$

$$-\lambda\theta_2[h^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + (\frac{1}{12}+\lambda)h^4\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} + (\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})h^6\frac{\partial^6 T}{\partial y^6}]$$

$$-\lambda(1-\theta_2)[h^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial y^6}]$$

$$-\lambda\theta_3[h^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\frac{1}{12}+\lambda)h^4\frac{\partial^4 T}{\partial z^4} + (\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})h^6\frac{\partial^6 T}{\partial z^6}$$

$$-\lambda(1-\theta_3)[h^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial z^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial z^6}]$$

$$\Longrightarrow T.E = \lambda.h^2.\nabla^2 T + \frac{\lambda^2.h^4}{2}\nabla^4 T + \frac{\lambda^3.h^6}{6}\nabla^6 T + ---$$

$$-\lambda\theta_1[(\frac{1}{12}+\lambda)h^4\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + (\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})h^6\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}]$$

$$-\lambda(1-\theta_1)[\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}]$$

$$-\lambda\theta_2[(\frac{1}{12}+\lambda)h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}+(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})h^6\frac{\partial^6T}{\partial y^6}]$$

$$-\lambda(1-\theta_2)[\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4T}{\partial y^4}+\frac{h^6}{360}\frac{\partial^6T}{\partial y^6}]$$

$$-\lambda\theta_3[(\frac{1}{12}+\lambda)h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}+(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})h^6\frac{\partial^6T}{\partial z^6}$$

$$-\lambda(1-\theta_3)[\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4T}{\partial z^4}+\frac{h^6}{360}\frac{\partial^6T}{\partial z^6}]$$

$$\Longrightarrow T.E=[\frac{\lambda^2}{2}-\lambda\theta_1(\frac{1}{12}+\lambda)-\frac{\lambda}{12}(1-\theta_1)]h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}$$

$$+[\frac{\lambda^3}{6}-\lambda\theta_1(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})-\frac{\lambda}{360}(1-\theta_1)]h^6\frac{\partial^6T}{\partial x^6}$$

$$+[\frac{\lambda^2}{2}-\lambda\theta_2(\frac{1}{12}+\lambda)-\frac{\lambda}{12}(1-\theta_2)]h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}$$

$$+[\frac{\lambda^3}{6}-\lambda\theta_2(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})-\frac{\lambda}{360}(1-\theta_2)]h^6\frac{\partial^6T}{\partial y^6}$$

$$+[\frac{\lambda^2}{2}-\lambda\theta_3(\frac{1}{12}+\lambda)-\frac{\lambda}{12}(1-\theta_3)]h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}$$

$$+[\frac{\lambda^3}{6}-\lambda\theta_3(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})-\frac{\lambda}{360}(1-\theta_3)]h^6\frac{\partial^6T}{\partial z^6}\quad ...(22)$$

6. خوارزمية الفروق الأمامية

بوضع $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$ في (3-71) وإهمال حدود المشتقة السادسة نحصل على الباقي للخوارزمية:

$$\Longrightarrow T.E=[\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}+[\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}+[\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}$$

$$\Longrightarrow T.E=\lambda[\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}+\lambda[\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}+\lambda[\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}$$

بوضع $\lambda=\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}$ نحصل على:-

$$T.E=\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha.\Delta t}{2h^2}-\frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}+\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha.\Delta t}{2h^2}-\frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}$$

$$+\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha.\Delta t}{2h^2}-\frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}$$

$$\Rightarrow T.E = \alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial y^4}$$

$$+\alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial z^4} \quad \ldots\ldots(23)$$

إذًا خوارزمية الفروق الأمامية من الرتبة الأولى في المتغير الزمني ومن الرتبة الثانية في المتغير المكاني، ونلاحظ أن الخطأ الباقي في (3-72) يؤول إلى الصفر كلما كانت $(h, \Delta t) \to (0,0)$ وبذلك تكون خوارزمية الفروق الأمامية متناغمة مع معادلة الحرارة، أي أن:-

$$\lim_{(h,\Delta t)\to(0,0)} T.E = 0 \qquad (24)$$

7.خوارزمية الفروق الخلفية

بوضع $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1$ في (3-71) وإهمال حدود المشتقة السادسة نحصل على الباقي للخوارزمية:

$$\Rightarrow T.E = [\frac{\lambda^2}{2} - \lambda(\frac{1}{12} + \lambda)]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + [\frac{\lambda^2}{2} - \lambda(\frac{1}{12} + \lambda)]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial y^4}$$

$$+[\frac{\lambda^2}{2} - \lambda(\frac{1}{12} + \lambda)]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$$

$$\Rightarrow T.E = -\lambda[\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \lambda[\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} - \lambda[\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$$

بوضع $\lambda = \frac{\alpha.\Delta t}{h^2}$ نحصل على:-

$$T.E = -\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha.\Delta t}{2h^2} + \frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha.\Delta t}{2h^2} + \frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial y^4}$$

$$-\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha.\Delta t}{2h^2} + \frac{1}{12}]h^4\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$$

$$\Rightarrow T.E = -\alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} + \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} + \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial y^4}$$

$$-\alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} + \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial z^4} \quad \ldots\ldots(25)$$

إذًا خوارزمية الفروق الخلفية من الرتبة الأولى في المتغير الزمني ومن الرتبة الثانية في المتغير المكاني، ونلاحظ أن الخطأ الباقي في (3-74) يؤول إلى الصفر كلما كانت $(h, \Delta t) \to (0,0)$ وبذلك تكون خوارزمية الفروق الخلفية متناغمة مع معادلة الحرارة، أي أن:-

$$\lim_{(h,\Delta t)\to(0,0)} T.E = 0 \qquad (26)$$

8.خوارزمية كرانك نيكلسون

بوضع $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{1}{2}$ في (3-71) وعدم إهمال حدود المشتقة السادسة نحصل على الباقي للخوارزمية:

$$T.E=[\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{2}(\frac{1}{12}+\lambda)-\frac{\lambda}{24}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}$$
$$+[\frac{\lambda^3}{6}-\frac{\lambda}{2}(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})-\frac{\lambda}{720}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial x^6}$$
$$+[\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{2}(\frac{1}{12}+\lambda)-\frac{\lambda}{24}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}$$
$$+[\frac{\lambda^3}{6}-\frac{\lambda}{2}(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})-\frac{\lambda}{720}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial y^6}$$
$$+[\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{2}(\frac{1}{12}+\lambda)-\frac{\lambda}{24}]h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}$$
$$+[\frac{\lambda^3}{6}-\frac{\lambda}{2}(\frac{1}{360}+\frac{\lambda}{12}+\frac{\lambda^2}{2})-\frac{\lambda}{720}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial z^6}$$

$$\Rightarrow T.E=-\frac{\lambda}{12}h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}-\frac{\lambda}{12}h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}-\frac{\lambda}{12}h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}$$
$$-\lambda[\frac{\lambda^2}{12}+\frac{\lambda}{24}+\frac{1}{360}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial x^6}-\lambda[\frac{\lambda^2}{12}+\frac{\lambda}{24}+\frac{1}{360}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial y^6}$$
$$-\lambda[\frac{\lambda^2}{12}+\frac{\lambda}{24}+\frac{1}{360}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial z^6}$$

بوضع $\lambda=\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}$ نحصل على:-

$$T.E=-\frac{\alpha.\Delta t}{12h^2}h^4\frac{\partial^4T}{\partial x^4}-\frac{\alpha.\Delta t}{12h^2}h^4\frac{\partial^4T}{\partial y^4}-\frac{\alpha.\Delta t}{12h^2}h^4\frac{\partial^4T}{\partial z^4}$$
$$-\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12h^4}+\frac{\alpha.\Delta t}{24h^2}+\frac{1}{360}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial x^6}-\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12h^4}$$
$$+\frac{\alpha.\Delta t}{24h^2}+\frac{1}{360}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial y^6}-\frac{\alpha.\Delta t}{h^2}[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12h^4}+\frac{\alpha.\Delta t}{24h^2}+\frac{1}{360}]h^6\frac{\partial^6T}{\partial z^6}$$

$$\Rightarrow T.E=-\frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4T}{\partial x^4}-\frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4T}{\partial y^4}-\frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4T}{\partial z^4}$$
$$-\alpha.\Delta t[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12}+\frac{\alpha.\Delta t.h^2}{24}+\frac{h^4}{360}]\frac{\partial^6T}{\partial x^6}-\alpha.\Delta t[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12}$$
$$+\frac{\alpha.\Delta t.h^2}{24}+\frac{h^4}{360}]\frac{\partial^6T}{\partial y^6}-\alpha.\Delta t[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12}+\frac{\alpha.\Delta t.h^2}{24}+\frac{h^4}{360}]\frac{\partial^6T}{\partial z^6}$$

وبإهمال بعض الحدود نحصل على:-

$$T.E = -\frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} - \frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$$

$$-\alpha.\Delta t[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12}]\frac{\partial^6 T}{\partial x^6} - \alpha.\Delta t[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12}]\frac{\partial^6 T}{\partial y^6} - \alpha.\Delta t[\frac{\alpha^2.(\Delta t)^2}{12}]\frac{\partial^6 T}{\partial z^6}$$

وحيث أن $\frac{\partial^m T}{\partial t^m} = \alpha^m \nabla^{2m} T$ نحصل على:-

$$T.E = -\frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} - \frac{\alpha.\Delta t}{12}h^2\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$$

$$-\frac{\alpha^3.(\Delta t)^3}{12}\frac{\partial^3 T}{\partial t^3} - \frac{\alpha^3.(\Delta t)^3}{12}\frac{\partial^3 T}{\partial t^3} - \frac{\alpha^3.(\Delta t)^3}{12}\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}$$

$$\Longrightarrow T.E = -\frac{\alpha.\Delta t}{12}[h^2\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \alpha^2.(\Delta t)^2\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}] - \frac{\alpha.\Delta t}{12}[h^2\frac{\partial^4 T}{\partial y^4}$$

$$+\alpha^2.(\Delta t)^2\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}] - \frac{\alpha.\Delta t}{12}[h^2\frac{\partial^4 T}{\partial z^4} + \alpha^2.(\Delta t)^2\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}]$$

... ... (27)

إذًا خوارزمية كرانك نيكلسون من الرتبة الثانية في المتغير الزمني ومن الرتبة الثانية في المتغير المكاني، ونلاحظ أن الخطأ الباقي في (3-76) يؤول إلى الصفر كلما كانت $(h, \Delta t) \to (0,0)$ وبذلك تكون خوارزمية الفروق الخلفية متناغمة مع معادلة الحرارة، أي أن:-

$$\lim_{(h,\Delta t)\to(0,0)} T.E = 0 \qquad (28)$$

التناغم شرط ضروري للتقارب، لكن غير كافي، وكل خوارزميات الفروق المنتهية متناغمة مع المعادلة التفاضلية الجزئية المقابلة لها، بالإضافة إلى ذلك فهي متقاربة.

9. التقارب ***Convergence***

معادلة الفروق المنتهية تكون متقاربة إذا كان الفرق بين الحل الفعلي U والحل التقريبي V يؤول إلى الصفر كلما كانت $(h, \Delta t) \to (0,0)$، أي أن [16 - 24]:-

$$\lim_{(h,\Delta t)\to(0,0)} (U - V) = 0 \qquad (29)$$

10. الاستقرار ***Stability***

معادلة الفروق المنتهية تكون مستقرة إذا كانت الاضطرابات الناتجة في الحل المحسوب تتضمحل في كل خطوة عن سابقتها بدلًا من أن تنمو [18 - 30].

مما سبق من المعادلة (14) حصلنا على الباقي (خطأ القطع - البتر) كما يلي:

$$T.E = T_{i,j,k}^{l+1} - T_{i,j,k}^{l} - \lambda\theta_1[T_{i+1,j,k}^{l+1} - 2T_{i,j,k}^{l+1} + T_{i-1,j,k}^{l+1}]$$

$$-\lambda(1-\theta_1)[T^{l}_{i+1,j,k}-2T^{l}_{i,j,k}+T^{l}_{i-1,j,k}]$$

$$-\lambda\theta_2[T^{l+1}_{i,j+1,k}-2T^{l+1}_{i,j,k}+T^{l+1}_{i,j-1,k}]$$

$$-\lambda(1-\theta_2)[T^{l}_{i,j+1,k}-2T^{l}_{i,j,k}+T^{l}_{i,j-1,k}]$$

$$-\lambda\theta_3[T^{l+1}_{i,j,k+1}-2T^{l+1}_{i,j,k}+T^{l+1}_{i,j,k-1}]$$

$$-\lambda(1-\theta_3)[T^{l}_{i,j,k+1}-2T^{l}_{i,j,k}+T^{l}_{i,j,k-1}]$$

الآن لدراسة استقرار الخوارزمية نطبق طريقة فون نيومان للاستقرار العددي، حيث نضع $T^{l}_{i,j,k}=E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}\ ;g=\sqrt{-1}$ في المعادلة السابقة فنحصل على:-

$$E^{l+1}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}-E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}=$$

$$\lambda\theta_1\left[E^{l+1}e^{gh\alpha(i+1)}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}-2E^{l+1}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}+E^{l+1}e^{gh\alpha(i-1)}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}\right]$$

$$-\lambda(1-\theta_1)[E^{l}e^{gh\alpha(i+1)}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}-2E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}+E^{l}e^{gh\alpha(i-1)}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}]$$

$$-\lambda\theta_2\left[E^{l+1}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta(j+1)}e^{gh\gamma k}-2E^{l+1}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}+E^{l+1}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta(j-1)}e^{gh\gamma k}\right]$$

$$-\lambda(1-\theta_2)[E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta(j+1)}e^{gh\gamma k}-2E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}+E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta(j-1)}e^{gh\gamma k}]$$

$$-\lambda\theta_3\left[E^{l+1}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma(k+1)}-2E^{l+1}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}+E^{l+1}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma(k-1)}\right]$$

$$-\lambda(1-\theta_3)[E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma(k+1)}-2E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}+E^{l}e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma(k-1)}]$$

بالقسمة على $l\quad e^{gh\alpha i}e^{gh\beta j}e^{gh\gamma k}$ نحصل على:-

$$E-1=\lambda\theta_1(Ee^{gh\alpha}-2E+Ee^{gh\alpha})-\lambda(1-\theta_1)(e^{gh\alpha}-2+e^{gh\alpha})$$

$$-\lambda\theta_2(Ee^{gh\beta}-2E+Ee^{gh\beta})-\lambda(1-\theta_2)(e^{gh\beta}-2+e^{gh\beta})$$

$$-\lambda\theta_3(Ee^{gh\gamma}-2E+Ee^{gh\gamma})-\lambda(1-\theta_3)(e^{gh\gamma}-2+e^{gh\gamma})$$

$$\Longrightarrow E[1-\lambda\theta_1(e^{gh\alpha}-2+e^{gh\alpha})-\lambda\theta_2(e^{gh\beta}-2+e^{gh\beta})$$

$$-\lambda\theta_3(e^{gh\gamma}-2+e^{gh\gamma})]=1+\lambda(1-\theta_1)(e^{gh\alpha}-2+e^{gh\alpha})$$

$$+\lambda(1-\theta_2)(e^{gh\beta}-2+e^{gh\beta})+\lambda(1-\theta_3)(e^{gh\gamma}-2+e^{gh\gamma})$$

$$\Rightarrow E = \frac{1+\lambda(1-\theta_1)(e^{gh\alpha}-2+e^{gh\alpha})+\lambda(1-\theta_2)(e^{gh\beta}-2+e^{gh\beta})+\lambda(1-\theta_3)(e^{gh\gamma}-2+e^{gh\gamma})}{1-\lambda\theta_1(e^{gh\alpha}-2+e^{gh\alpha})-\lambda\theta_2(e^{gh\beta}-2+e^{gh\beta})-\lambda\theta_3(e^{gh\gamma}-2+e^{gh\gamma})}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1+\lambda(1-\theta_1)(2\cos h\alpha-2)+\lambda(1-\theta_2)(2\cos h\beta-2)+\lambda(1-\theta_3)(2\cos h\gamma-2)}{1-\lambda\theta_1(2\cos h\alpha-2)-\lambda\theta_2(2\cos h\beta-2)-\lambda\theta_3(2\cos h\gamma-2)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1+\lambda(1-\theta_1)(-4sin^2\frac{h\alpha}{2})+\lambda(1-\theta_2)(-4sin^2\frac{h\beta}{2})+\lambda(1-\theta_3)(-4sin^2\frac{h\gamma}{2})}{1-\lambda\theta_1(-4sin^2\frac{h\alpha}{2})-\lambda\theta_2(-4sin^2\frac{h\beta}{2})-\lambda\theta_3(-4sin^2\frac{h\gamma}{2})}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1-4\lambda[(1-\theta_1)sin^2\frac{h\alpha}{2}+(1-\theta_2)sin^2\frac{h\beta}{2}+(1-\theta_3)sin^2\frac{h\gamma}{2}]}{1+4\lambda[\theta_1 sin^2\frac{h\alpha}{2}+\theta_2 sin^2\frac{h\beta}{2}+\theta_3 sin^2\frac{h\gamma}{2}]}$$

شرط الاستقرار هو: $E \le 1$ حيث E معامل التكبير الذي يحدد نمو مركبات فوريه.

$$\Rightarrow \left|\frac{1-4\lambda[(1-\theta_1)sin^2\frac{h\alpha}{2}+(1-\theta_2)sin^2\frac{h\beta}{2}+(1-\theta_3)sin^2\frac{h\gamma}{2}]}{1+4\lambda[\theta_1 sin^2\frac{h\alpha}{2}+\theta_2 sin^2\frac{h\beta}{2}+\theta_3 sin^2\frac{h\gamma}{2}]}\right| \le 1$$

خوارزمية الفروق الأمامية

بوضع $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ نحصل على شرط الاستقرار:-

$$\Rightarrow \left|1-4\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2}+sin^2\frac{h\beta}{2}+sin^2\frac{h\gamma}{2}]\right| \le 1$$

$$\Rightarrow -1 \le 1-4\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2}+sin^2\frac{h\beta}{2}+sin^2\frac{h\gamma}{2}] \le 1$$

$$\Rightarrow -2 \le -4\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2}+sin^2\frac{h\beta}{2}+sin^2\frac{h\gamma}{2}] \le 0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} \frac{1}{2} \ge \lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2}+sin^2\frac{h\beta}{2}+sin^2\frac{h\gamma}{2}] \ge 0$$

$$\Rightarrow \lambda \le \frac{1}{2[sin^2\frac{h\alpha}{2}+sin^2\frac{h\beta}{2}+sin^2\frac{h\gamma}{2}]} \quad (30)$$

إذًا خوارزمية الفروق الأمامية مستقرة بشرط $\lambda \le \frac{1}{6}$.

11.خوارزمية الفروق الخلفية

بوضع $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1$ نحصل على شرط الاستقرار:-

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{1 + 4\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}]} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| 1 + 4\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}] \right| \geq 1$$

إما $$-1 \geq 1 + 4\lambda[sin^2\frac{h}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}]$$

$$\Rightarrow -2 \geq 4\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}]$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{-1}{2[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}]} \quad (31)$$

وهذا مستحيل.

أو $$1 + 4\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}] \geq 1$$

$$\Rightarrow 4\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}] \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$$

إذًا خوارزمية الفروق الخلفية مستقرة مطلقًا، وعليه فإنه حسب مبدأ عالم الرياضيات الأمريكي بيتر ديفيد لاكس $Peter\ David\ Lax$ (1926 –) تكون الخوارزمية متقاربة.

خوارزمية كرانك نيكلسون

بوضع $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{1}{2}$ نحصل على شرط الاستقرار:-

$$\Rightarrow \left| \frac{1 - 2\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}]}{1 + 2\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}]} \right| \leq 1 \quad (32)$$

$$\Rightarrow \left| 1 - 2\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}] \right| \leq \left| 1 + 2\lambda[sin^2\frac{h\alpha}{2} + sin^2\frac{h\beta}{2} + sin^2\frac{h\gamma}{2}] \right|$$

إذًا خوارزمية كرانك نيكلسون مستقرة مطلقًا، وعليه فإنه حسب مبدأ لاكس Lax تكون الخوارزمية متقاربة.

النتائج:

من خلال إجراء مقارنة بين النتائج التي تحصلنا عليها من الطرق العددية مع بعضها البعض، ومع النتائج التحليلية، تبين أن خوارزمية الفروق الأمامية $Forward\ Difference\ Algorithm$ أسرع تقارب إلى الحل الفعلي من خوارزمية الفروق الخلفية $Backward\ Difference\ Algorithm$ وخوارزمية كرانك نيكلسون $Crank - Nicolson\ Algorithm$، وأن الحل في كل الخوارزميات يكون دقيقًا ومتناغمًا، مما يؤدي إلى توفير الكثير من الوقت والجهد، وبدراسة الاستقرارية العددية لكل من خوارزميات الفروق المنتهية الثلاثة باستخدام طريقة فون نيومان $Von\ Neumann$ تبين أن خوارزمية الفروق الأمامية $Forward\ Difference\ Algorithm$ تكون مستقرة إذا كانت $\lambda \leq \frac{1}{6}$، أي إذا كانت $\Delta t \leq 55.5$، أي أنها مستقرة على نحوٍ مشروط، في حين أن خوارزمية الفروق الخلفية $Backward\ Difference\ Algorithm$ وخوارزمية كرانك نيكلسون $Crank - Nicolson\ Algorithm$ تكون مستقرة لجميع قيم λ، أي أنها مستقرة على نحوٍ غير مشروط.

والجدول التالي يلخص المقارنة بين الخواص العددية لخوارزميات الفروق المنتهية لحل معادلة الحرارة في ثلاثة أبعاد ذات شروط غير متجانسة.

الخواص العددية $Numerical\ Proper$	الفروق الأمامية $Forward$	الفروق الخلفية $Bacward$	كرانك – نيكلسون $Crank - Nicolson$
الخوارزمية $Algorithm$	$\theta = 0$	$\theta = 1$	$\theta = \frac{1}{2}$
خطأ القطع (البتر) $Truncation\ Error$	$T.E = \alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} + \alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$	$T.E = -\alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} + \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} + \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} - \alpha.\Delta t[\frac{\alpha.\Delta t}{2} + \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$	$T.E = -\frac{\alpha.\Delta t}{12}[h^2\frac{\partial^4}{\partial x}$ $+ \alpha^2.(\Delta t)^2\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}]$ $-\frac{\alpha.\Delta t}{12}[h^2\frac{\partial^4 T}{\partial y^4}$ $+ \alpha^2.(\Delta t)^2\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}]$ $-\frac{\alpha.\Delta t}{12}[h^2\frac{\partial^4 T}{\partial z^4}$ $+ \alpha^2.(\Delta t)^2\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}]$
الدقة (الرتبة) $Accuracy$	$O(h^2 + \Delta t)$	$O(h^2 + \Delta t)$	$O(h^2 + (\Delta t)^2)$

التناغم (التناسق) *Consistency*	متناغمة	متناغمة	متناغمة
التقارب *Convergence*	متقاربة	متقاربة	متقاربة
الاستقرار *Stability*	مستقرة بشرط $\lambda \leq \frac{1}{6}$	مستقرة مطلقًا	مستقرة مطلقًا
حجم الخطوة الزمنية *Time step size*	55	55	55
عدد خطوات التنفيذ *Number of steps*	179	267	223

References المراجع

1) Aitor Bergara, Finite Difference Numerical Methods of Partial Differential Equations in Finance with Matlab, 1th.

2) Alfio Quarteroni and Fausto Saleri, Scientific Computing with Matlab and Octave, 2th-2006.

3) Brian D. Hahn And Daniel T. Valentine, Essential Matlab for Engineers and Scientists, 3th-2007.

4) C. F. Chan Man Fong and D. De Kee and P N Kaloni, Advanced Mathematics for Engineering and Science, 1th-2003.

5) D. W. Jordan and P. Smith, Mathematical Techniques, 3th-2002.

6) Daniel R. Lynch, Numerical Partial Differential Equations for Environmental Scientists and Engineers, 1th-2005.

7) Dean G. Duffy, Advanced Engineering Mathematics, 1th-1998.

8) Donald W. Trim, Applied Partial Differential Equations, 1th-2013.

9) Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th-2006.

10) Howard B. Wilson and Louis H. Turcotte and David Halpern, Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using Matlab, 3th-2003.

11) Igor Yanovsky, Partial Differential Equations, 1th-2005.

12) John Douglas Moore, Introduction to Partial Differential Equations, 1th-2003.

13) John H. Mathews and Kurtis D. Fink, Numerical Methods Using Matlab, 3th-1999.

14) K. W. Morton and D. F. Mayers, Numerical Solution of Partial Differential Equations, 2th-2005.

15) Latif M. Jiji, Heat Conduction, 1th-2003.

16) Louise Olsen-Kettle, Numerical Solution of Partial Differential Equations, 1th.

17) M. Necati Ozisik, Heat Conduction, 2th-1993.

18) Mark Davis, Finite Difference Methods, 1th-2011.

19) Nakhle H. Asmar, Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, 2th-2005.

20) Paul Duchateau and David W. Zachmann, Theory and Problems of Partial Differential Equations, 1th-1988.

21) Peter Bloomfield and Founding Editor and Vic Barnett, Numerical Methods in Finance and Economics: A Matlab-Based Introduction, 2th-2006.

22) Richard Haberman, Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, 5th-2013.

23) Robert E. White, Computational Mathematics: Models, Methods and Analysis with Matlab and MPI, 1th-2004.

24) Steven C. Chapra and Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, 6th-2009.

25) Won Young Yang and Wenwu Cao and Tae-Sang Chung and John Morris, Applied Numerical Methods Using Matlab, 1th-2005.

26) Y. C. Pao, Engineering Analysis: Interactive Methods and Programs with FORTRAN, Quick Basic, Matlab, and Mathematica, 1th-2001.

27) أحمد عبدالعالي هب الريح، أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية، الطبعة الأولى، 2004.

28) أحمد عبدالعالي هب الريح، التحليل العددي، الطبعة الأولى، 2009.

29) اس فارلو، ترجمة: مها عواد الكبيسي، المعادلات التفاضلية الجزئية، الطبعة الأولى، 2005.
30) دوغلاس فايرس، ريتشارد بوردان، ترجمة: رمضان محمد جهيمة، كمال أبوالقاسم أبودية، التحليل العددي، الطبعة الأولى، 2001.
31) ديفيد ل. باورز، ترجمة: علي محمد عوين، أحمد صادق القرماني، مسائل القيم الحدية، الطبعة الثانية، 2008.
32) سعد محمد فضيلة، النفاتي معمر الرويعي، التحليل العددي للمهندسين، الطبعة الأولى، 2005.
33) السيد عبد المعطي البدوي، الرياضيات المتقدمة للمهندسين، الطبعة الأولى.
34) م. سبيجل، ترجمة: رمضان محمد جهيمة، حسن الزغداني، إبراهيم غبريال، المعادلات التفاضلية التطبيقية، الطبعة الثانية، 2008.
35) ماريوجي. سلفادوري، ملفن د. بارون، ترجمة: عبدالإله يونس، معروف محمد حديد، رشيد عبدالرزاق الصالحي، الطرق العددية في الهندسة، الطبعة الثانية.
36) أحمد عبدالعالي، تيسير احمد علي، خوارزميات الفروق النهائية لحل معادلة الحرارة، 2009.
37) جيرالد ريكتنوالد، تقريبات الفروق المنتهية لحل معادلة الحرارة،2011م.
38) ناجي قطناني، عبدالله عدوان عبدالله نصار، الطرق التحليلية والعددية لحل معادلة التوصيل الحراري، 2017م.
39) Abbas Abdelaziz Guma and Mahmud Salem Mahmud, Consistent Three-Dimensional Finite Difference Modeling of Heat Transfer with non-homogenous boundary conditions in Solar Modules, 2018.

ملحق البرامج المستخدمة في البحث

خوارزمية الفروق الأمامية

```
close all
clear
clc
tol=0.0001; % tolerance.
% Set of Nodes & time steps.
Nx=52;
Ny=10;
Nz=22;
Nt=200000;
% Dimensions of Solar Cell.
Lx=1.5;
Ly=0.05;
Lz=0.5;
% Step length.
dx=Lx/(Nx-2);
dy=Ly/(Ny);
dz=Lz/(Nz-2);
dt=55;
% Thermo-physical parameters.
kt=0.50;
rho=2719.0;
cp=871.0;
alfa=kt/(rho*cp);
dif_x=alfa*dt/(dx)^2;
dif_y=alfa*dt/(dy)^2;
```

```
dif_z=alfa*dt/(dz)^2;
% Initial condition.
for k=1:Nz+1
  for j=1:Ny+1
    for i=1:Nx+1
xnode= (2*i-3)/2*dx;
ynode= (2*j-3)/2*dy;
znode= (2*k-3)/2*dz;
temp_new(i,j,k)=25.0 * xnode*ynode*znode;
temp_old(i,j,k)=25.0 * xnode*ynode*znode;
    end
  end
end
error(1:Nx,1:Ny,1:Nz)=10^6;
temp_new(1:Nx,1,1:Nz)= 20;
temp_new(1:Nx,Ny,1:Nz)=60;
for it=1:Nt
temp_old = temp_new;
for k=2:Nz-1
  for j=2:Ny-1
    for i=2:Nx-1
temp_new(i,j,k)=dif_x*(temp_old(i+1,j,k)
+temp_old(i-1,j,k))+ dif_y*(temp_old(i,j+1,k)...
+temp_old(i,j-1,k))+dif_z*(temp_old(i,j,k+1)...
+temp_old(i,j,k-1))...
-temp_old(i,j,k)*(2*dif_x+2*dif_y+2*dif_z-1);
    end
  end
end
% The Boundary Conditions.
temp_new(1,2:Ny-1,1:Nz)=temp_new(2,2:Ny-1,1:Nz);
temp_new(Nx,2:Ny-1,1:Nz)=temp_new(Nx-1,2:Ny-1,1:Nz);
temp_new(1:Nx,2:Ny-1,1)=temp_new(1:Nx,2:Ny-1,2);
temp_new(1:Nx,2:Ny-1,Nz)=temp_new(1:Nx,2:Ny-1,Nz-1);
% accepted error
error = abs(temp_new - temp_old);
ER= max(error);
ER;
if ER<=tol
ER;
```

```
it;
    break
  end
end
% Specify your coordinates
% Choose a proper step-size, but do NOT try to make it very small
% The following [xl, yl, zl] vectors should be identical to the solar model,and should have the same number of points in each dimension.
yl = linspace(dx/2,1.5-dx/2,50);
xl = linspace(0,0.05,10);
zl = linspace(dz/2,0.5-dz/2,20);
[X,Y,Z] = meshgrid(xl,yl,zl);
xd = X(:,:,1);
yd = Y(:,:,1);
% This is your 3-layer Temperature matrix
% just callback your matrix here;
T = temp_new(2:51,1:10,2:21);
for i =1:length(zl)
zd = Z(:,:,i);
cd = T(:,:,i);
hold on
scatter3(yd(:),zd(:),xd(:),100,cd(:),'filled');
%scatter3(yd(:),zd(:),xd(:),500,cd(:),'.');
hold off
end
grid on
colormap(Jet(15))
colorbar
% specify your view point angle
view(28,45)
xlabel('X-axis')
ylabel('Z-axis')
zlabel('Y-axis')
```

خوارزمية الفروق الخلفية

```
close all
clear
clc
tol= 0.0001; % tolerance
% Set of Nodes & time steps.
Nx=52;
```

```
Ny=10;
Nz=22;
Nt=200000;
% Dimensions of Solar Cell.
Lx=1.5;
Ly=0.05;
Lz=0.5;
% Step length.
dx=Lx/(Nx-2);
dy=Ly/(Ny);
dz=Lz/(Nz-2);
dt=55;
% Thermo-physical parameters.
kt=0.50;
rho=2719.0;
cp=871.0;
alfa=kt/(rho*cp);
dif_x=alfa*dt/(dx)^2;
dif_y=alfa*dt/(dy)^2;
dif_z=alfa*dt/(dz)^2;
% Initial condition.
for k=1:Nz+1
  for j=1:Ny+1
    for i=1:Nx+1
xnode= (2*i-3)/2*dx;
ynode= (2*j-3)/2*dy;
znode= (2*k-3)/2*dz;
temp_new(i,j,k)=25.0 * xnode*ynode*znode;
temp_old(i,j,k)=25.0 * xnode*ynode*znode;
    end
  end
end
error(1:Nx,1:Ny,1:Nz)=10^6;
temp_new(1:Nx,1,1:Nz)= 20;
temp_new(1:Nx,Ny,1:Nz)=60;
for it=1:Nt
temp_old = temp_new;
for k=2:Nz-1
  for j=2:Ny-1
    for i=2:Nx-1
```

```
temp_new(i,j,k)=(temp_old(i,j,k)...
+dif_x*(temp_new(i+1,j,k)+temp_new(i-1,j,k)). ..
+dif_y*(temp_new(i,j+1,k)+temp_new(i,j-1,k)). ..
+dif_z*(temp_new(i,j,k+1)...
+temp_new(i,j,k-1)))/(1+2*(dif_x+dif_y+dif_z));
    end
  end
end
% The Boundary Conditions.
temp_new(1,2:Ny-1,1:Nz)=temp_new(2,2:Ny-1,1:Nz);
temp_new(Nx,2:Ny-1,1:Nz)=temp_new(Nx-1,2:Ny-1,1:Nz);
temp_new(1:Nx,2:Ny-1,1)=temp_new(1:Nx,2:Ny-1,2);
temp_new(1:Nx,2:Ny-1,Nz)=temp_new(1:Nx,2:Ny-1,Nz-1);
% accepted error
error = abs(temp_new - temp_old);
ER= max(error);
ER;
if ER<=tol
ER;
it;
   break
  end
end
% Specify your coordinates
% Choose a proper step-size, but do NOT try to make it very small
% The following [xl, yl, zl] vectors should be identical to the solar model,and should have the same
number of points in each dimension.
yl = linspace(dx/2,1.5-dx/2,50);
xl = linspace(0,0.05,10);
zl = linspace(dz/2,0.5-dz/2,20);
[X,Y,Z] = meshgrid(xl,yl,zl);
xd = X(:,:,1);
yd = Y(:,:,1);
% This is your 3-layer Temperature matrix
% just callback your matrix here;
T = temp_new(2:51,1:10,2:21);
for i =1:length(zl)
zd = Z(:,:,i);
cd = T(:,:,i);
hold on
```

```
scatter3(yd(:),zd(:),xd(:),100,cd(:),'filled');
% scatter3(yd(:),zd(:),xd(:),500,cd(:),'.');
hold off
end
grid on
colormap(Jet(15))
colorbar
% specify your view point angle
view(28,45)
xlabel('X-axis')
ylabel('Z-axis')
zlabel('Y-axis')
```

خوارزمية كرانك نيكلسون

```
close all
clear
clc
tol=0.0001; % tolerance
% Set of Nodes & time steps.
Nx=52;
Ny=10;
Nz=22;
Nt=200000;
% Dimensions of Solar Cell.
Lx=1.5;
Ly=0.05;
Lz=0.5;
% Step length.
dx=Lx/(Nx-2);
dy=Ly/(Ny);
dz=Lz/(Nz-2);
dt=55;
% Thermo-physical parameters.
kt=0.50;
rho=2719.0;
cp=871.0;
alfa=kt/(rho*cp);
dif_x=alfa*dt/(dx)^2;
dif_y=alfa*dt/(dy)^2;
dif_z=alfa*dt/(dz)^2;
% Initial condition.
```

```
for k=1:Nz+1
  for j=1:Ny+1
    for i=1:Nx+1
xnode= (2*i-3)/2*dx;
ynode= (2*j-3)/2*dy;
znode= (2*k-3)/2*dz;
temp_new(i,j,k)=25.0 * xnode*ynode*znode;
temp_old(i,j,k)=25.0 * xnode*ynode*znode;
    end
  end
end
error(1:Nx,1:Ny,1:Nz)=10^6;
temp_new(1:Nx,1 ,1:Nz)= 20.0;
temp_new(1:Nx,Ny,1:Nz)=60;
for it=1:Nt
temp_old = temp_new;
for k=2:Nz-1
  for j=2:Ny-1
    for i=2:Nx-1
temp_new(i,j,k)=(dif_x/(2+2*dif_x+2*dif_y+2*dif_z)). ..
*(temp_new(i+1,j,k)+temp_new(i-1,j,k))...
+(dif_y/(2+2*dif_x+2*dif_y+2*dif_z))*(temp_new(i,j+1,k). ..
+temp_new(i,j-1,k))...
+(dif_z/(2+2*dif_x+2*dif_y+2*dif_z))*(temp_new(i,j,k+1). ..
+temp_new(i,j,k-1))...
+(dif_x/(2+2*dif_x+2*dif_y+2*dif_z))*(temp_old(i+1,j,k). ..
+temp_old(i-1,j,k))...
+(dif_y/(2+2*dif_x+2*dif_y+2*dif_z))*(temp_old(i,j+1,k). ..
+temp_old(i,j-1,k))...
+(dif_z/(2+2*dif_x+2*dif_y+2*dif_z))*(temp_old(i,j,k+1). ..
+temp_old(i,j,k-1))...
+((1-dif_x-dif_y-dif_z)/(1+dif_x+dif_y+dif_z)). ..
*temp_old(i,j,k);
    end
  end
end
% The Boundary Conditions.
temp_new(1,2:Ny-1,1:Nz)=temp_new(2,2:Ny-1,1:Nz);
temp_new(Nx,2:Ny-1,1:Nz)=temp_new(Nx-1,2:Ny-1,1:Nz);
temp_new(1:Nx,2:Ny-1,1)=temp_new(1:Nx,2:Ny-1,2);
```

```
temp_new(1:Nx,2:Ny-1,Nz)=temp_new(1:Nx,2:Ny-1,Nz-1);
% accepted error
error = abs(temp_new - temp_old);
ER= max(error);
ER;
if ER<=tol
ER;
it;
   break
  end
end
% Specify your coordinates
% Choose a proper step-size, but do NOT try to make it very small
% The following [xl, yl, zl] vectors should be identical to the solar model, and should have the same number of points in each dimension.
yl = linspace(dx/2,1.5-dx/2,50);
xl = linspace(0,0.05,10);
zl = linspace(dz/2,0.5-dz/2,20);
[X,Y,Z] = meshgrid(xl,yl,zl);
xd = X(:,:,1);
yd = Y(:,:,1);
% This is your 3-layer Temperature matrix
% just callback your matrix here;
T = temp_new(2:51,1:10,2:21);
for i =1:length(zl)
zd = Z(:,:,i);
cd = T(:,:,i);
hold on
scatter3(yd(:),zd(:),xd(:),100,cd(:),'filled');
% scatter3(yd(:),zd(:),xd(:),500,cd(:),'.');
hold off
end
grid on
colormap(Jet(15))
colorbar
% specify your view point angle
view(28,45)
xlabel('X-axis')
ylabel('Z-axis')
zlabel('Y-axis')
```

خوارزمية الحل التحليلي (1)

```
close all
clear
clc
syms l m n
Alfa = 2.1113E-7; t =20 ;
T1=20;
T2=60;
a=1.5;
b=0.5;
c=0.05;
Nx=50;
Ny=10;
Nz=20;
dx=a/(Nx);
dy=c/(Ny);
dz=b/(Nz);
I=0;J=0;K=0;
for k=1:(Nz+1)
  for j=1:(Ny+1)
    for i=1:(Nx+1)
xnode=(i-1)*dx;
ynode=(j-1)*dy;
znode=(k-1)*dz;
for l = 1:7
  for m = 1:7
    for n = 1:7
Txyzt(i,j,k)=(sum(sum(sum((30/(n^2*m*l^2*pi^5))...
*exp(-Alfa*pi^2*t*(n^2/a^2+m^2/c^2+l^2/b^2)). ..
*cos(n*pi*xnode/a)*sin(m*pi*ynode/c)*cos(l*pi*znode/b)))).
+(((T2-T1)/c)*ynode)+T1);
          end
        end
      end
    end
  end
end
T=Txyzt;
format long
% Specify your coordinates
```

```
% Choose a proper step-size, but do NOT try to make it very small
% The following [xl, yl, zl] vectors should be identical to the solar model,and should have the same number of points in each dimension.
yl = linspace(0,1.5,51);
xl = linspace(0,0.05,11);
zl = linspace(0,0.5,21);
[X,Y,Z] = meshgrid(xl,yl,zl);
xd = X(:,:,1);
yd = Y(:,:,1);
% This is your 3-layer Temperature matrix
% just callback your matrix here;
for i =1:length(zl)
zd = Z(:,:,i);
cd = T(:,:,i);
hold on
scatter3(yd(:),zd(:),xd(:),100,cd(:),'filled');
% scatter3(yd(:),zd(:),xd(:),500,cd(:),'.');
hold off
end
grid on
colormap(Jet(15))
colorbar
% specify your view point angle
view(28,45)
xlabel('X-axis')
ylabel('Z-axis')
zlabel('Y-axis')
```

خوارزمية الحل التحليلي (2)

```
close all
clear
clc
syms l m n
Alfa = 2.1113E-7; t =20 ;
T1=20;
T2=60;
a=1.5;
b=0.5;
c=0.05;
I=0;J=0;K=0;
```

```
for K = K +1;
  for J = J +1;
    for I = I +1;
xnode=0.015;
ynode=0.04444;
znode=0.4875;
Txyzt(I,J,K)=double(symsum(symsum(symsum((30/(n^2*m*l^2*pi^5))*exp(-
Alfa*pi^2*t*(n^2/a^2+m^2/c^2+l^2/b^2)). ..
*cos(n*pi*xnode/a)*sin(m*pi*ynode/c)*cos(l*pi*znode/b). ..
,1,22),1,22),1,22)+(((T2-T1)/c)*ynode)+T1);
T=Txyzt(I,J,K)
    end
  end
end
```